Suites et Séries de Fonctions

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Suites de fonctions

Types de convergence

Convergence simple

$$\boxed{(f_n) \text{ cvs vers } f \text{ sur } I \iff \forall t \in I, |f_n(x) - f(x)| \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0}$$

Convergence uniforme

$$\boxed{(f_n) \text{ cvu vers } f \text{ sur } I \iff \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0}$$

Continuité

$$\boxed{\begin{cases} \forall n, f_n \ \boxed{\textit{continue}} \text{ sur } I \\ (f_n) \text{ cvu vers } f \text{ sur } I \end{cases} \implies f \text{ continue sur } I}$$

Interversion des limites

$$\boxed{\begin{cases} (f_n) \text{ cvu vers } f \text{ sur } I = [a, b[\\ \forall n, f_n \longrightarrow l_n \text{ en } b \end{cases} \implies \begin{cases} f \text{ admet une limite en } b \\ \lim_{x \to b} f(x) = \lim_{n \to \infty} l_n \end{cases}}$$

Dérivation

$$\boxed{\begin{cases} \forall n, f_n \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ (f_n') \text{ cvs vers } f \text{ sur } I \\ (f_n') \text{ cvu vers } g \text{ sur } I \end{cases} \implies \begin{cases} f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ f' = g \end{cases}}$$

Dérivations successives

$$\boxed{\begin{cases} \forall n, f_n \text{ est } \mathcal{C}^k \text{ sur } I \\ \forall j < k, (f_n^{(j)}) \text{ cvs vers } g_j \text{ sur } I \\ (f_n^{(k)}) \text{ cvu vers } g \text{ sur } I \end{cases} \implies \begin{cases} f \text{ est } \mathcal{C}^k \text{ sur } I \\ f^{(j)} = g_j \text{ pour } j < k \\ f^{(k)} = g \end{cases}}$$

Intégration

$$\boxed{\begin{cases} \forall n, f_n \text{ est continue sur } I = [a, b] \\ (f_n) \text{ cvu vers } f \text{ sur } I \end{cases} \implies \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt}$$

Séries de fonctions

Types de convergence

$$\text{On a } \forall n \in \mathbb{N}, S_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

Convergence simple

$$\boxed{\begin{aligned} \sum f_n \text{ cvs vers } S \text{ sur } I &\iff \forall x \in I, \sum S(x) \text{ converge} \\ &\iff \forall x \in I, |S_n(x) - S(x)| \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}}$$

Convergence uniforme

$$\boxed{\begin{aligned} \sum f_n \text{ cvu vers } S \text{ sur } I &\iff (S_n) \text{ cvu vers } S \text{ sur } I \\ &\iff \sup_{x \in I} |S_n(x) - S(x)| \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}}$$

Convergence normale

$$\boxed{\sum f_n \text{ cvn vers } S \text{ sur } I \iff \exists (u_n) \text{ telle que } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq u_n \\ \sum u_n \text{ converge} \end{cases}}$$

Continuité

$$\boxed{\begin{cases} \forall n, f_n \ \boxed{\textit{continue}} \text{ sur } I \\ \sum f_n \text{ cvu vers } S \text{ sur } I \end{cases} \implies S \text{ continue sur } I}$$

Interversion des limites

$$\boxed{\begin{cases} \sum f_n \text{ cvu vers } S \text{ sur } I = [a, b[\\ \forall n, f_n \longrightarrow l_n \text{ en } b \end{cases} \implies \begin{cases} \sum l_n \text{ converge} \\ S \text{ admet une limite en } b \\ \lim_{x \to b} S(x) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} l_n \end{cases}}$$

Dérivation

$$\boxed{\begin{cases} \forall n, f_n \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ \sum f_n \text{ cvs vers } S \text{ sur } I \\ \sum f_n' \text{ cvu vers } g \text{ sur } I \end{cases} \implies \begin{cases} S \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ S' = g \end{cases}}$$

Dérivations successives

$$\boxed{\begin{cases} \forall n, f_n \text{ est } \mathcal{C}^k \text{ sur } I \\ \forall j < k, \sum f_n^{(j)} \text{ cvs vers } S_j \text{ sur } I \\ \sum f_n^{(k)} \text{ cvu vers } S_k \text{ sur } I \end{cases} \implies \begin{cases} S : x \mapsto \sum f_n(x) \text{ est } \mathcal{C}^k \text{ sur } I \\ S^{(i)} = S_i \text{ pour } j \leq k \end{cases}}$$

Intégration

$$\boxed{\begin{cases} \forall n, f_n \text{ est continue sur } I = [a, b] \\ \sum f_n \text{ cvu vers } S \text{ sur } I \end{cases} \implies \int_a^b S(t)dt = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \int_a^b f_n(t)dt}$$